Opgave 1. Oplossing.

a $\quad M\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$

b. De bewegingsvergelijking wordt nu:

$$(M+m)\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$x = A\cos\omega t \qquad \omega^2 = \frac{k}{M+m}$$

$$a = -A\omega^2\cos\omega t$$

Kracht op blokje m: $F_m = ma = -A\frac{k}{M+m}\cdot m\cdot\cos\omega t$

maximaal: $-\frac{Akm}{M+m}$.

Wrijvingskracht: $F_w = -\mu N = -\mu mg$

$F_w = F_m \Rightarrow \boxed{A = \frac{M+m}{k}\mu g.}$

c. $\quad (m+M)\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0\cos\omega t$

Blz 79, 80 $\Rightarrow C = \dfrac{F_0/(M+m)}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad \omega_0^2 = \dfrac{k}{(m+M)}$

d. $\quad F_m = ma = -\dfrac{F_0/(m+M)}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\cdot\omega^2 m \qquad \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2} = \dfrac{\mu g(m+M)}{F_0}$

$F_w = -\mu mg. \qquad \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k\mu g}{F_0 + \mu g(m+M)}}$

e : zie blz 93, 94

2a) $2m\ddot{x}_1 = -x_1 \frac{2mg}{\ell} - (x_1 - x_2)k$ $\quad \ddot{x}_1 + x_1\left(\frac{g}{\ell} + \frac{k}{2m}\right) + x_2\left(-\frac{k}{2m}\right) = 0$

$m\ddot{x}_2 = -x_2 \frac{mg}{2\ell} + (x_1 - x_2)k$ $\quad \ddot{x}_2 + x_1\left(-\frac{k}{m}\right) + x_2\left(\frac{g}{2\ell} + \frac{k}{m}\right) = 0$

met $\frac{g}{\ell} = 4c$ en $\frac{k}{m} = 2c$ $\longrightarrow$ $\ddot{x}_1 + x_1(5c) + x_2(-c) = 0$

$\ddot{x}_2 + x_1(-2c) + x_2(4c) = 0$

b) $x_1 = A e^{i\omega t}$ $\quad (-\omega^2 + 5c)x_1 + (-c)x_2 = 0$

$x_2 = B e^{i\omega t}$ $\quad (-2c)x_1 + (-\omega^2 + 4c)x_2 = 0$

eis $\Delta = 0$ $\longrightarrow$ met $\omega^2 = p$ $\quad (-p+5c)(-p+4c) - 2c^2 = 0$

$p^2 - 9cp + 18c^2 = 0$ $\quad p = \frac{1}{2}\left(9c \pm \sqrt{81c^2 - 4 \cdot 18c^2}\right) =$

$= \frac{9}{2}c \pm \frac{1}{2}\sqrt{9}\,c \longrightarrow \omega_1^2 = 6c = \frac{3k}{m}$

$\omega_2^2 = 3c = \frac{3k}{2m}$

c) $\frac{x_1}{x_2} = \frac{c}{5c - \omega^2}$ $\longrightarrow$ voor ω_1^2: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{c}{5c - 6c} = -1$

voor ω_2^2: $x_1/x_2 = c/5c - 3c = \frac{1}{2}$

3 a) randvoorwaarde op grensvlak:

$k \cdot r = k' \cdot r = k'' \cdot r$

projecties van deze vectoren op grensvlak moeten gelijk zijn $\Rightarrow$

$k \sin\vartheta = k' \sin\vartheta' = k'' \sin\varphi$ (1)

daarnaast geldt voor de invallende en gereflecteerde golf dat: $k = k'$ en dus $\vartheta = \vartheta'$

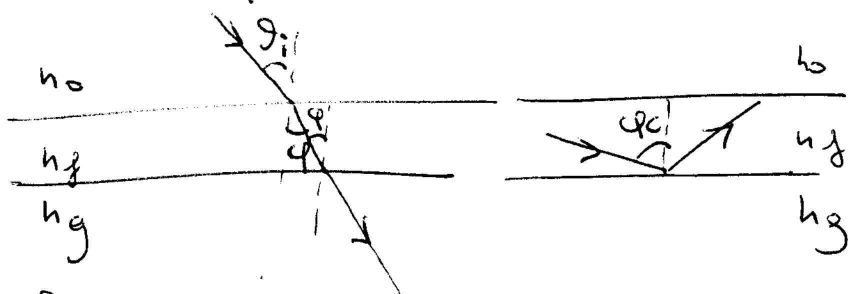
voor de propagatieconstantes voor de doorgelaten en invallende golf geldt,

$$\frac{k''}{k} = \frac{\omega/u''}{\omega/u} = \frac{c/u''}{c/u} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (2)$$

met n_2 en n_1 de brekingsindices van de twee media. Uit (1) en (2) volgt direct dat

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\varphi} = \frac{n_2}{n_1}$$

b)



φ_c - kritische hoek

$$\frac{\sin\vartheta_i}{\sin\varphi} = \frac{n_f}{n_0} = 2$$

$$\sin\varphi_c = \frac{n_g}{n_f} = \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow \varphi_c = 49^\circ$

Dus alle hoeken $\varphi > 49^\circ$ zijn o.k.

Om φ zo groot mogelijk te maken moet ϑ dus ook zo groot mogelijk zijn. Bij $\vartheta_i = 90^\circ$ wordt gevonden dat $\varphi = 42^\circ$. Dit is kleiner dan $\varphi_c \rightarrow$ geen interne reflectie binnen film mogelijk op deze manier

c) Ga uit van $\vec{E}_{trans} = \vec{E}'' e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r} - \omega t)}$

$k''r = k'' x \sin\varphi - k'' y \cos\varphi$

$\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}} = i\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n^2} - 1}$

want $\sin\varphi = \frac{\sin\theta}{n}$

$\Rightarrow k''r = \underbrace{\frac{k''\sin\theta}{n}}_{k_1} \cdot x - \underbrace{k'' i\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n^2} - 1}}_{\alpha} \cdot y = k_1 x - i\alpha y$

$\rightarrow \vec{E}_{trans} = \vec{E}'' e^{ik_1 x + \alpha y - i\omega t}$

$= \vec{E}'' e^{-\alpha|y|} e^{i(k_1 x - \omega t)}$ want y is negatief

d) $I \sim |E|^2 = E''^2 e^{-2\alpha|y|}$ $|y| = \frac{\lambda}{2}$

$\alpha = k'' \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n^2} - 1}$ $k'' = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n^2} - 1}$ is in de orde van grootte van 1

$\rightarrow e^{-2\alpha|y|} \approx e^{-2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{2}\lambda \cdot 1} \approx e^{-2\pi} \sim \underline{\underline{10^{-3}}}$

Dus intensiteit is ongeveer factor 10^{-3} afgenomen.

Opgave 4 Uitwerking:

a) Licht buiten de apertuur ($|y| > b/2$) wordt volledig geblokkeerd.
Licht binnen de apertuur ($|y| < b/2$) wordt volledig doorgelaten, maar ondergaat een faseverschuiving, die i.h.a. afhankelijk is van de plaats y binnen de apertuur.

b) $I(\nu) = |U(\nu)|^2$ Voor $\nu = 0$:

$$I(0) = \left| \int_{-b/2}^{b/2} e^{iF(y)} dy \right|^2 = \left[\mathrm{Re}\left[\int e^{iF(y)} dy \right]\right]^2 + \left[\mathrm{Im}\left[\int e^{iF(y)} dy \right]\right]^2$$

$$= \left[\int_{-b/2}^{+b/2} \cos F(y)\, dy \right]^2 + \left[\int_{-b/2}^{+b/2} \sin F(y)\, dy \right]^2$$

c) $$\left[\int_{-b/2}^{+b/2} \cos F(y)\, dy \right]^2 + \left[\int_{-b/2}^{+b/2} \sin F(y)\, dy \right]^2 =$$

$$\iint_{-b/2}^{+b/2} \left[\cos F(y) \cos F(y') + \sin F(y) \sin F(y') \right] dy\, dy' = \iint_{-b/2}^{+b/2} \cos\left(F(y) - F(y') \right) dy\, dy'$$

$\leq b^2$; $= b^2$ als $F(y) = F(y')$ $\forall y, y'$, dus $F(y) = \text{const}$, bijv. $F(y) = 0$

Antw volgt ook uit a): $F(y) = 0 \rightarrow$ al het licht blijft in fase $\rightarrow$ pos. interferentie

d) $$U(0) = \int_{-b/2}^{+b/2} e^{\frac{i 2\pi y}{b}} dy = \frac{b}{2\pi i} \left[e^{\frac{i 2\pi y}{b}} \right]_{-b/2}^{b/2}$$

$$= \frac{b}{2\pi i} \left[e^{i\pi} - e^{-i\pi} \right] = \frac{b}{2\pi i} \left[-1 - (-1) \right] = 0$$

Voor elk punt met $y < 0$ in de apertuur is er een corresponderend punt $y + b/2$ dat $180°$ extra fasedraaiing ondergaat. In de voorwaartse richting vindt verder geen relatieve fasedraaiing plaats
$\Rightarrow$ er vindt volledige uitdoving plaats.